

GUÍA | HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS

(Versión: 15 febrero 2022)

1. PRESENTACIÓN

El objetivo de esta asignatura no es tanto proporcionar una visión general de la Historia de las matemáticas, sino invitar al alumno a la reflexión sobre su disciplina a partir de un estudio detallado de algunos episodios históricos centrales. En el presente curso estudiaremos con detalle la articulación histórica y conceptual de la lógica y la teoría de conjuntos entre la segunda mitad del siglo XIX y la primera mitad del XX a partir de la monografía del eminente filósofo chileno Roberto Torretti, *El paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en filosofía matemática*. Este trabajo nos permitirá adentrarnos, a través de sus distintos protagonistas (Cantor, Hilbert, Gödel) en el origen y sentido de algunos conceptos centrales de la matemática contemporánea (conjunto, sistema axiomático, demostración, computabilidad, etc.). Una ventaja del trabajo de Torretti es que se encuentra libremente disponible en la red, gracias a la donación del autor.

2. EL TEXTO Y CÓMO USARLO

El curso se basa enteramente en la monografía de Torretti, un comentario pormenorizado de los textos fundamentales de la tradición conjuntista. El proyecto de Torretti (sólo parcialmente realizado) consiste en analizar el auge y caída del programa de Hilbert frente a las paradojas planteadas por los transfinitos de Cantor. Dicho programa articula un ideal sobre qué podamos considerar conocimiento matemático y, en particular, en qué consiste una prueba.

La monografía de Torretti constituye un ejemplo de Historia *interna* de las matemáticas: se basa en el análisis de los conceptos sobre los que se basa el desarrollo del programa de Hilbert, tal como los presentan sus autores, pero con la vista puesta en lo que hoy sabemos sobre estas mismas cuestiones. El lector no encontrará, sin embargo, otros elementos *externos*, como la biografía de los autores, su contexto o circunstancias, ni su conexión con otras ideas de la época. Desde el curso virtual, y en función de las necesidades de nuestros alumnos, intentaremos suplir tales elementos cuando sean necesarios para la mejor comprensión del texto. Sin embargo, el texto de

Torretti tiene la virtud de que es auto-suficiente: contiene y explica todos los elementos necesarios para poder seguirlo y, en este sentido es perfecto para el aprendizaje a distancia.

El texto de Torretti es extenso y sumamente detallado en la presentación de las demostraciones de cada una de las tesis analizadas. Dejamos al juicio de interés de cada estudiante cuánto profundizar en cada una de ellas. El nivel mínimo del curso lo fija el cuestionario que sigue debajo, en cuyas respuestas cada estudiante podrá trabajar por su cuenta o, a través del curso virtual.

3. CÓMO SEGUIR EL CURSO

El curso está estructurado en torno al cuestionario sobre el texto de Torretti: son 22 preguntas que el estudiante puede resolver en 11 semanas. Cada estudiante debe resolver ambas preguntas (dedicando unas 500 palabras a cada respuesta) y colgarlas en el foro dedicado a ello en el curso virtual como prueba de evaluación continua.

Sin embargo, las preguntas no analizan con igual intensidad todas las partes del libro. Las diez primeras se concentran sobre las 100 primeras páginas. Pero sólo hay cuatro preguntas sobre las 70 páginas siguientes. Sobre los tres últimos capítulos del libro (2.10, 2.11 y 2.12) se formulan apenas tres preguntas generales, pero su estudio requiere bastante profundidad. Como principio general, no se pretende que el alumno maneje o memorice los muchos formalismos y demostraciones que presenta Torretti, sino que debe trabajar con ellos para poder responder con precisión a las preguntas planteadas en el cuestionario. Se recomienda que cada estudiante vaya avanzando y resolviendo el cuestionario a su paso, sin perder de vista el calendario de referencia del curso. Cuando le surjan dudas, debe colgarlas en el foro dedicado al efecto en el curso virtual.

4. EVALUACIÓN

El examen del curso consistirá en un comentario sobre algún texto de los autores tratados en *El paraíso de Cantor*, guiado por algunas preguntas. Se presupone la lectura de la obra, pero los conceptos necesarios para el comentario son los que se presentan en el cuestionario. El examen supone 8,9 puntos de la nota. Colgaremos ejemplos en el curso virtual

Las respuestas al cuestionario en el curso virtual, como prueba de evaluación continua, suponen 1,1 puntos de la nota. El propósito de estas PEC es ayudaros a leer el

libro, secuenciar el contenido y redactar para el examen. Algunos de vosotros copiáis y pegáis respuestas de otros años (o de otros sitios web): no sirve para nada, porque unas décimas no ayudan a aprobar la asignatura, y al final, por no utilizar bien las PEC, suspendéis el examen.

Si el estudiante no puede seguir las PEC, una alternativa es elaborar un comentario a partir de dos de los artículos que puede encontrar en la sección de recursos de ALF, conforme a las siguientes instrucciones:

- Deben ser dos textos sobre temas conexos
- El trabajo debe tener unas 2000 palabras, con la siguiente estructura: 200 palabras para presentar el problema que se va a tratar; 1000 palabras para resumir el contenido de los dos artículos; 500 palabras para relacionar ambos artículos con los temas del libro de Torretti; 300 palabras con una conclusión.
- Fechas de entrega: 1 de junio/1 de septiembre, en el correo del profesor de la asignatura
- Una vez que elijáis los textos, contactad con el profesor de la asignatura antes de ponerlos a trabajar.
- Si tenéis otras lecturas sobre el curso que queráis proponer, contactad también con nosotros para ver si son adecuadas.

Debemos advertir que para valorar tanto el examen como el cuestionario, tendremos en cuenta que la redacción sea correcta, precisa y sin faltas de ortografía. De ahí la necesidad de que el alumno se ejercite con el cuestionario para poder presentarse con garantías al examen.

5. TUTORIZACIÓN

Durante la pandemia las tutorías se realizarán con cita previa en la plataforma Teams

Javier González de Prado Salas

Email: jgonzalezdeprado@fsof.uned.es

Elena Denia

Email: edenia@fsof.uned.es

Dpto. de Lógica, Historia y Filosofía de la ciencia UNED. Humanidades Paseo de Senda del rey 7 28040 Madrid

6. CUESTIONARIO

[La fecha señalada es la fecha máxima de entrega]

Parte I | Conjuntos

21 de febrero

(1) Haga una breve semblanza (500-1000 palabras) de Georg Cantor apoyándose en materiales que encuentre en la red –e incluya la referencia

(2) Explique de qué modo se originan las ideas de Cantor sobre el infinito en el estudio de las series trigonométricas

28 de febrero

(3) Explique el concepto cantoriano de potencia (numerosidad) y los distintos tipos de infinito que permite distinguir

(4) Según Torretti, ¿qué dos vías confluyeron en la formación del concepto de transfinito?

7 de marzo

(5) ¿Por qué el teorema del buen orden es central para el programa de Cantor?

(6) ¿Por qué los cardinales transfinitos son distintos de los ordinales?

14 de marzo

(7) ¿Qué es la hipótesis del continuo y cómo afecta al programa de Cantor?

(8) ¿Por qué no toda “pluralidad bien definida” sería un conjunto en el sentido de Cantor?

21 marzo

(9) Explique la controversia entre Poincaré y Zermelo a propósito del axioma de selección

(10) ¿Por qué se hizo necesario definir axiomáticamente la teoría de conjuntos?

28 de marzo

Parte II | Cálculos

(11) Haga una breve semblanza (500-1000 palabras) de David Hilbert apoyándose en materiales que encuentre en la red –e incluya la referencia

(12) Explique la importancia de los conceptos de *consistencia*, *punto de vista finito* y *razonamiento sustantivo* en el programa de Hilbert

04 de abril

(13) Explique cuál era el proyecto de Gottlob Frege y en qué sentido su definición de número introdujo una contradicción que lo arruinaría

(14) Explique las paradojas de Cantor y Burali-Forti y en qué sentido afectaban al concepto cantoriano de transfinito. Explique también en qué sentido la teoría russelliana de los tipos proporcionaba una solución y a qué coste.

18 de abril

(15) ¿Por qué el concepto de *aseveración funcional* y el *modo recursivo* de pensar defendidos por Thoralf Skolem permitirían una fundamentación hilbertiana de la aritmética?

(16) ¿En qué consiste el *problema de la decisión*? ¿En qué sentido lo resuelve E. Post para el cálculo proposicional?

25 de abril

(17) ¿De qué modo prueba Gödel que el cálculo predicativo de primer orden es completo? ¿Por qué la prueba no es constructiva?

(18) ¿Qué es, para Hilbert, la teoría de la prueba? ¿En qué sentido el procedimiento de gödelización utilizado en la prueba de los teoremas de incompletitud ejemplifica esta teoría hilbertiana?

2 de mayo

(19) Explique y comente la siguiente afirmación de Torretti (p. 352): el primer teorema de incompletitud de Gödel “habrá de parecernos mucho más grave si creemos que P y los sistemas afines comprende todos los recursos de que dispone el hombre para conocer con certeza una verdad sobre números no incluida ya en la aritmética finitista”

(20) ¿En qué sentido la tesis de Church constituye “una decisión de aceptar la computabilidad como criterio de calculabilidad” (p. 376)?

9 de mayo

(21) ¿Qué quiere decir que “el problema de la detención es insoluble”?

(22) Gerhard Gentzen utilizó la inducción transfinita en sus dos demostraciones de la consistencia de la aritmética formalizada. Explique y comente la siguiente observación de Torretti (p. 319): “Si el programa de Hilbert acaba recurriendo al transfinito, ¿por qué tantos melindres y reservas ante el paraíso heredado de Cantor? ¿por qué no instalarse en él, alegremente, de una vez por todas?”