

Una reconstrucción histórica del debate Einstein-Bohr en torno a la teoría cuántica

Joaquín Herrero Pintado

Aspectos de la Ciencia Contemporánea.
Grado de Filosofía. UNED. Febrero 2013

Resumen— Esta es una reconstrucción de cómo Einstein y Bohr elaboraron los argumentos con los que debatieron desde 1927 hasta su muerte sobre la teoría cuántica y su adecuación a la realidad. Adoptamos como hilo conductor la evolución del punto de vista de Einstein dividiendo su pensamiento en tres fases y mostrando cómo la influencia de cada una de ellas afectó a los diversos autores que, además de Einstein y Bohr, ayudaron a construir el debate.

Palabras clave—*Einstein, Bohr, Teoría cuántica, Realidad*

I. INTRODUCCIÓN

Una de las dificultades en una reconstrucción histórica de la polémica entre Einstein y Bohr es que desde 1905 hasta 1927 se van produciendo sacudidas tales en el campo de la física que muchos de los físicos que elaboraron las teorías objeto del debate que vamos a analizar fueron cambiando de opinión favoreciendo a lo largo del tiempo teorías aparentemente contradictorias, incluidos los propios protagonistas del debate objeto de este trabajo: Albert Einstein y Niels Bohr. Por ejemplo, Max Born pasó de contribuir decisivamente a la formulación de la mecánica matricial a posteriormente adoptar la mecánica ondulatoria reinterpreándola estadísticamente; Wolfgang Pauli pasó de aplicar la mecánica matricial al átomo de hidrógeno a defender la antagonista mecánica ondulatoria de Schrödinger. Pero los casos más sobresalientes de estas evoluciones en la opinión fueron los de Einstein y Bohr mismos.

Niels Bohr pasó de no creer en los cuantos y aceptar la teoría ondulatoria de la luz a aceptar parcialmente la teoría cuántica que postuló Planck, a apostar por mantener el apoyo experimental por la física clásica y a finalmente a sostener un ambiguo principio de complementariedad que construye una imagen ondulatoria o cuántica de la naturaleza distinta en función del tipo de experimento que se realice sobre ella.

Por su parte, Albert Einstein pasó de teorizar de forma clásica solo en función de magnitudes observables a postular la existencia de campos inobservables experimentalmente para posteriormente retomar una postura en defensa del determinismo y la causalidad observables en la física clásica.

Para complicar más las cosas la polémica misma no versó sobre un solo tema sino que debatieron sobre distintos aspectos de la teoría cuántica y además lo hicieron de forma indirecta hasta 1927 y de forma directa desde 1927.

La polémica entre Einstein y Bohr que tratamos de reconstruir aquí es consecuencia de las investigaciones que se efectuaron desde 1900 sobre la naturaleza cuántica de la radiación electromagnética. Bohr describe los términos del debate con Einstein como una “renuncia a un modo de descripción causal de los procesos atómicos” que hay que decidir si es temporal, a fin de comprender los fenómenos, o un “paso irrevocable hacia obtener una correcta armonía entre el análisis y la síntesis de los fenómenos físicos” [1]

Dada la dificultad que supone para una reconstrucción los cambios de posición o ambigüedades de prácticamente todos los que intervinieron y dado además que la incorporación de Niels Bohr al debate general fue posterior a la de Einstein usaremos como metodología de la reconstrucción que nos proponemos las tres fases que observamos en el pensamiento de Einstein y cómo cada una de ellas sirvió de inspiración para investigaciones y experimentos que definieron el debate directo con Bohr.

II. PRIMER EINSTEIN: LA CUESTIÓN DE LOS OBSERVABLES

Una primera fase del pensamiento de Einstein la encontramos en la motivación de sus trabajos de 1905 y 1909.

En uno de sus famosos trabajos publicados en 1905 titulado “Sobre la electrodinámica de cuerpos en movimiento” postula su teoría de la relatividad especial a partir de observables, es decir, de sucesos en el espacio y el tiempo tales como el movimiento relativo de un imán y un conductor abandonando como punto de partida la postulación, entonces generalizada, de un teórico éter propagador de la luz. Esta forma de proceder de Einstein tuvo un antecedente en los trabajos de de Ernst Mach, que sostenía que cualquier declaración admisible científicamente debía ser empíricamente demostrable.

En 1909, en su artículo “Estado actual del problema de la radiación” Einstein procedía de la misma manera al afirmar que la fórmula de Jeans y Lorentz no era compatible con los hechos.

Tanto el contenido como las propuestas metodológicas que contenían dichos artículos ejercieron influencia en dos físicos que tuvieron un papel relevante en el debate que nos ocupa. Estos dos físicos fueron Louis de Broglie y Werner Heisenberg.

Louis de Broglie, animado por los artículos de Einstein de 1909 en los que anticipaba que futuras investigaciones fusionarían las ondas y las partículas, tuvo en 1923 la idea de

extender el descubrimiento de Einstein a todas las partículas, incluidos los electrones, idea que esbozó en tres artículos publicados ese mismo año.

De Broglie postuló una teoría en la que las ondas actúan como medio de transporte conduciendo, como si de un piloto se tratase, a las partículas de un lugar a otro, suponiendo, por tanto, que tanto ondas como partículas tienen existencia material y simultánea. El éxito de su teoría era que posibilitaba una justificación de la que carecía el modelo de átomo de Bohr con órbitas cuánticas ya que las órbitas posibles para los electrones serían solo aquellas que fueran capaces de contener un número entero de longitudes de onda.

Por otra parte, las obras de Einstein de 1905 y 1909 influyeron en la evolución intelectual de Heisenberg durante los años previos a su colaboración con Bohr, cuando en 1923 trabajaba en Gotinga como ayudante de Max Born, pues éste y su discípulo Jordan se inspiraban en el Einstein de 1905 al postular que “solo deben intervenir en el enunciado de las leyes naturales aquellas magnitudes que sean en principio observables y determinables” [2]

La insistencia de Einstein en acudir exclusivamente a magnitudes observables al formular su teoría y la puesta en práctica de dicho método por Born influyeron en la metodología de investigación decididamente empirista adoptada por Heisenberg en sus revolucionarios trabajos sobre mecánica cuántica, lo que significó que decidió concentrarse en las frecuencias e intensidades de las líneas espectrográficas emitidas por los átomos y renunciar a interpretar la trayectoria del electrón en la cámara de niebla sobre la que no disponía de mediciones.

III. PRIMER BOHR: ÁTOMOS CUÁNTICOS, RADIACIÓN ONDULATORIA

El descubrimiento por Rutherford en 1911 de que el interior del átomo consistía en un núcleo que contenía la práctica totalidad de su masa y electrones a su alrededor en órbitas con diferentes energías fue completado por Bohr en 1913 postulando que los electrones solo podían moverse alrededor del núcleo en ciertas órbitas, lo que suponía efectivamente la cuantización de las órbitas del electrón al impedir que formaran un continuo. Este modelo pudo ser usado con éxito para predecir que ciertas líneas espectrales atribuidas al hidrógeno correspondían realmente al helio ionizado. Cuando se verificó la veracidad de esta predicción Einstein mismo reconoció que el modelo de Bohr era “un descubrimiento extraordinariamente importante” [3]

Sin embargo Bohr no disponía de un fundamento matemático sólido para explicar la tabla periódica con su modelo atómico cuántico. A falta de tal fundamento Bohr guió sus investigaciones por lo que denominó “principio de correspondencia” que le obligaba a eliminar cualquier idea cuántica que no tuviera apoyo experimental por la física clásica. Sin embargo dicho principio suponía que “Bohr había elaborado su átomo empleando un cóctel embriagador de física clásica y física cuántica. Y, al hacerlo, había violado principios aceptados de la física”. [4]

Veremos que este intento de equilibrar principios clásicos y cuánticos acompañará a Bohr durante algún tiempo y será el germen del principio de complementariedad con el que Bohr pretendió resolver definitivamente la necesidad de sostener al mismo tiempo teorías cuánticas y clásicas para explicar los fenómenos observados, principio que resultó ser el centro del debate posterior con Einstein.

Curiosamente, a pesar de sus ideas cuánticas, discontinuas, sobre la estructura atómica, Bohr no creía a principios de los años veinte en la explicación cuántica de Einstein sobre el problema de la radiación del que este se había ocupado intensamente de 1905 a 1911. Más bien estaba a favor de la teoría ondulatoria de la luz aunque era capaz de aceptar las ideas de Planck sobre la emisión y absorción cuantizada de la luz.

Fue solo cuando Sommerfeld llamó la atención de Bohr en 1923 sobre el descubrimiento de Arthur H. Compton (el aumento de longitud de onda de los rayos X tras ser desviados por los electrones) que Bohr, muy a su pesar, se vio obligado a aceptar la teoría cuántica de la luz que tanto aborrecía.

IV. SEGUNDO EINSTEIN: INTERPRETACIONES ESTADÍSTICAS. DUALIDAD INEVITABLE.

Una segunda fase en el pensamiento de Einstein la encontramos con motivo de sus propias investigaciones sobre la naturaleza dual de la luz demostrada por Louis de Broglie, fenómeno que había incomodado tanto a Einstein que, tras volver del primer Congreso Solvay de noviembre de 1911, que trató del tema, abandonó sus investigaciones cuánticas y se dedicó a ampliar su teoría de la relatividad. Pues bien, fue en el curso de estas investigaciones relativistas cuando Einstein dio un giro en su principio de basar toda investigación científica en magnitudes observables, pues la relatividad general “no se ajustaba al análisis epistemológico de 1905” [5] al incluir el concepto de campo, que no es una magnitud observable.

Al tener noticia en 1916 del experimento llevado a cabo por James Franck y Gustav Hertz en el que consiguieron establecer el umbral de energía a partir del cual era posible arrancar un electrón a un átomo de mercurio que era bombardeado con electrones, Einstein se dio cuenta de con dicho experimento “la versión cuántica de la luz no solo es buena, sino que está demostrada” [6] porque le permitía derivar la ley de Planck a partir del átomo cuántico de Bohr. Esto hizo que Einstein volviera a investigar sobre la naturaleza dual de la luz. Pero el Einstein que regresaba a investigar sobre teoría cuántica en 1916 no era el mismo que el que investigó sobre los cuantos de luz en 1905. Einstein ahora no necesitaba partir de observables y era capaz de postular la existencia de campos inobservables. Esto fue decisivo en el enfoque que adoptaría sobre la teoría cuántica en los años 20.

Esta nueva investigación de Einstein le llevó a descubrir que el fotón, el cuanto de luz, posee un momento vectorial, es decir, que no solo tiene magnitud sino dirección, lo cual resultó en la necesidad de introducir la teoría de probabilidades en el dominio cuántico ya que, como ponían de relieve claramente sus propias ecuaciones, era el azar quien regulaba el momento exacto en el que un electrón cambiaría espontáneamente de nivel de energía y también era el azar el que regulaba la

dirección en la que sería emitido el cuanto de luz correspondiente.

En 1920 escribe a Max Born: “La cuestión de la causalidad me preocupa mucho. ¿Pueden la absorción y emisión de cuantos de luz ser entendidas como un requisito de la causalidad o seguirán siendo un residuo estadístico? Debo admitir que, en este punto, mis convicciones no aclaran gran cosa. Lo cierto es que si me viese obligado a renunciar completamente a la causalidad sería mucho más infeliz”. [7]

Además de la necesidad de introducir mecanismos estadísticos para describir los fenómenos cuánticos había el problema de que la teoría cuántica de la luz no era capaz de explicar los fenómenos ondulatorios asociados con la luz tales como la interferencia y la difracción, pero, por otra parte, el experimento de Compton y el efecto fotoeléctrico no eran explicables con una teoría ondulatoria. “Hay, por tanto, dos teorías sobre la luz, ambas indispensables y sin conexión lógica alguna entre ellas” escribió Einstein en abril de 1924. [8]

En el curso de estas investigaciones de 1920 para tratar de resolver la dualidad onda-partícula y la relación de los cuantos de luz con el campo ondulatorio Einstein habló a Bohr, como este recuerda de una solución basada en un ‘Gespensterfeld’ [9], un campo de ondas fantasma, sin ningún momento ni energía, parecido a las ondas-piloto de De Broglie que guiaría a los fotones y determinaría la probabilidad de que tomen una trayectoria determinada.

Como antes anticipamos, este Einstein de 1920 que postula campos inobservables y mecanismos de probabilidad que ponen en cuestión la visión causal y determinista de la física difiere en gran medida del Einstein empirista de 1905. Pues bien, esta nueva línea de pensamiento de Einstein será fuente de inspiración para Max Born en su reinterpretación de la mecánica ondulatoria de Schrödinger.

A. Influencia de Einstein en Schrödinger

Schrödinger, que se definía a sí mismo como alguien solitario, a cierta distancia de las escuelas científicas y con un abanico de intereses que iban de la física cuántica a la filosofía se sintió intelectualmente muy cerca de Einstein, quizás debido a la profunda fascinación que ambos sentían por el trabajo de Boltzmann, y por ello sus primeras investigaciones, muy alabadas por el propio Einstein, fueron sobre relatividad general. Esta cierta independencia de pensamiento y su admiración por Einstein serían factores clave que ocasionarían el apoyo de Schrödinger a Einstein en el debate general que nos ocupa.

Tomando como punto de partida la hipótesis de De Broglie y asumiendo que “para tratar adecuadamente con ondas uno debía tener una ecuación de ondas” [10], ausente en la hipótesis de De Broglie, Schrödinger consiguió crear a finales de 1925 la formulación de una completa mecánica ondulatoria, que encontró rápidamente muchos adeptos por estar formulada en base a ecuaciones diferenciales bien conocidas por los físicos, y con la que era posible describir matemáticamente la propagación de las ondas de partículas. En enero de 1926 la publicó en su conocido trabajo “Cuantización como un problema de valores propios” (‘Quantisierung als

Eigenwertproblem’) en el que presentaba su ecuación con respecto a la función de onda Ψ (la amplitud de la onda asociada al electrón), una ecuación que tenía la virtud de resumir la dualidad de la materia como onda y como partícula y cuyas soluciones cuando se aplicaban a las energías de las órbitas de los electrones transmitían una imagen de la órbita del electrón como una nube continua que rodeaba al átomo. El electrón era pues, para Schrödinger, un espacio lleno de ondas.

B. El debate Bohr-Schrödinger

El éxito de Schrödinger, el reconocimiento que su ecuación estaba teniendo entre los físicos, hasta el punto de que Max Born la calificó como “la forma más profunda de las leyes cuánticas” [11] y el que se demostrara por partida doble que era formalmente equivalente a las investigaciones cuánticas que se hacían en Copenhague, hizo que Bohr interviniera para invitar a Schrödinger en septiembre de 1926 a visitar su Instituto y debatir allí sobre la mecánica ondulatoria. No cabe duda de que Bohr estaría muy interesado en escuchar cómo había llegado Schrödinger a explicar el funcionamiento del átomo usando teorías ondulatorias como las que él mismo había creado con su modelo BKS pero había descartado.

Aunque Einstein y Schrödinger no sostenían exactamente los mismos puntos de vista, este debate entre Bohr y Schrödinger se puede considerar uno de los antecedentes (junto con el que tuvieron Einstein y Heisenberg al que haremos mención ahora) del debate directo entre Einstein y Bohr que sucedería desde 1927, ya que, con su modelo, Schrödinger estaba recuperando una imagen continua clásica de la naturaleza, sustituyendo los incomprensibles conceptos cuánticos que tanto irritarían a Einstein con explicaciones clásicas. En este caso Schrödinger reducía los saltos cuánticos propuestos en Copenhague a un proceso continuo de emisión y absorción de radiación.

Las discusiones entre Bohr y Schrödinger están detalladas en el escrito “Penetrando en nueva tierra” incluido en el volumen “Diálogos sobre la física atómica” que escribió Heisenberg. En este debate Bohr ya anticipa algunas de las posturas que defenderá ante Einstein, como el de renunciar a entender la realidad con conceptos clásicos y a reducirla a su formulación matemática: “eso no demuestra que no existan saltos cuánticos, demuestra solamente que no podemos imaginarlos”. [12]

Schrödinger ratifica esta posición de Bohr sobre la realidad en la carta que escribe a Wien el mes siguiente: “la aproximación de Bohr a los problemas atómicos es realmente llamativa. Está completamente convencido de que cualquier comprensión en el sentido habitual de la palabra es imposible. Por consiguiente, la conversación casi inmediatamente se dirige hacia cuestiones filosóficas, y pronto uno no sabe si sostiene realmente la posición que él está atacando o si debe atacar la posición que él está defendiendo”. [13]

El punto realmente conflictivo de la ecuación de Schrödinger resultó ser cómo interpretar la función de onda Ψ . Schrödinger comprendió que el cuadrado de la función de onda $|\Psi|^2$ correspondía con una densidad espacial conservada, y la interpretación de Schrödinger sobre qué era lo que se conservaba en dicha nube continua era en términos de carga

eléctrica: “el electrón en el átomo se distribuye en el espacio según la amplitud de su función de onda”. [14] Sin embargo la interpretación más exitosa de esa magnitud conservada vendría por parte de Max Born, que no estaba influido por un primer Einstein defensor de conceptos clásicos sino por el Einstein que en 1920 se apartó de recurrir a observables para proponer campos fantasma.

C. *Influencia de Einstein en Max Born*

Max Born liberó a Ψ del sustrato material que Schrödinger trató de darle y en su famoso artículo publicado en junio de 1926 en el que analizaba el tratamiento cuántico de las colisiones atómicas interpretó Ψ no como un electrón repartido en el espacio sino como una onda de probabilidad que describe una partícula y cuyo cuadrado $|\Psi|^2$ corresponde con la probabilidad de encontrar al electrón en una zona concreta del espacio.

El propio Max Born explicó al recibir el premio Nobel de física en 1954 cómo llegó a la interpretación estadística de la función de onda. Fue inspirado por una idea que tuvo Einstein, el cual “había intentado explicar la dualidad de partículas y ondas considerando el cuadrado de la amplitud óptica de la onda como la densidad de probabilidad de la existencia de fotones”. Uniendo esta inspiración a sus propios conocimientos de óptica concluyó: “la mecánica cuántica de Schrödinger ... da una respuesta bastante definida a la pregunta del efecto de la colisión [de un electrón con un átomo]; pero no hay lugar para una descripción causal. No se obtiene respuesta a la pregunta ‘¿cuál es el estado después de la colisión?’ sino solamente para la de ‘¿cuán probable es un resultado determinado de la colisión?’ Aquí surge todo el problema del determinismo. ... Yo me siento inclinado a abandonar el determinismo en el mundo de los átomos.” [15]

En efecto, la reinterpretación de Born de la mecánica ondulatoria de Schrödinger no solo la dejaba sin conexión con la realidad sino que, además hacía surgir el problema del determinismo hasta el punto de que Born decide prescindir de él. Este punto de vista de Born, adoptado por Bohr, será duramente combatido por Einstein a partir de 1927 y aún antes, cuando vea en 1926 como Heisenberg también decide prescindir del determinismo al investigar sobre lo que posteriormente se denominaría su ‘principio de incertidumbre’.

En Octubre de 1926 Wolfgang Pauli generalizó la idea de Born haciéndola aún más radical al dejar de referir la función de onda a un fenómeno continuo y por tanto manifestándose la distribución de probabilidad de Born siempre de modo puntual y discontinuo, con lo que la ecuación de Schrödinger dejaba de formar parte definitivamente de un mundo físico continuo, ondulatorio para pasar a integrarse como parte fundamental de la teoría cuántica.

V. LA GESTACIÓN DE LA OPINIÓN DE BOHR

A. *Influencia de Einstein en Heisenberg y Bohr*

Para 1924, año en el que Heisenberg pasó de Gotinga a trabajar con Bohr en Copenhague, Heisenberg estaba convencido no solo del método de Einstein, sino también de la veracidad de sus conclusiones: la propia radiación está

cuantizada y en consecuencia es inevitable aceptar la dualidad onda-corpúsculo. Sin embargo este punto de vista era contrario al sostenido por Bohr en el momento en el que Heisenberg comenzó a trabajar con él.

Bohr no aceptaba los cuantos de energía, y había elaborado una teoría puramente ondulatoria de la luz denominada BKS por haberla construido junto con sus ayudantes Kramers y Slater. Curiosamente, a esta teoría contraria al modo de pensar del Einstein de 1905, Slater había aportado el campo fantasma sin energía ni momento defendido por Einstein en los años 20, si bien el modelo BKS se separaba notablemente de los objetivos más clásicos de Einstein al considerar la conservación de la energía y el momento solo en promedio, como una propiedad estadística, lo que hacía que Einstein empezara a mirar con recelo las elaboraciones teóricas de Bohr por muy ondulatorias y defensoras del continuo que fueran.

Así, aunque había elementos defendidos por Einstein en cada uno de las dos modelos en conflicto en Copenhague, Einstein no se identificaba con ninguno de ellos. A Bohr le dijo respecto de su abandono de la conservación de la energía de su modelo BKS que “si es preciso abandonar estas ideas tan fundamentales en la física clásica, entonces preferiría ser zapatero o empleado de un casino de juego antes que físico” [16], y con Heisenberg tuvo la conocida discusión que pasamos a analizar y que fue narrada por éste en su escrito “La mecánica cuántica y una conversación con Einstein” incluido en el volumen “Diálogos sobre la física atómica” en la que cuestionó el punto de partida de sus teorías cuánticas. [17]

B. *Debate Einstein-Heisenberg*

Heisenberg narra en primera persona su sorpresa al escuchar a Einstein renunciar al postulado de Mach de que “una teoría es propiamente la mera suma de observaciones” con la frase “pero usted no cree seriamente que se puedan aceptar en una teoría física únicamente las magnitudes observables”, a lo que Heisenberg, con razón, replicó “¿yo pensaba que precisamente usted había establecido este pensamiento como base de su teoría de la relatividad!”. [18]

Sin embargo el pensamiento de Einstein había evolucionado, y en 1924 pensaba que solo la teoría decide sobre lo que se puede observar. Heisenberg reconoce que tuvo dificultades en defender por qué en su apuesta por magnitudes observables había prescindido de postular órbitas definidas en el interior del átomo cuando Einstein le señaló a la perfectamente observable trayectoria de un electrón en una cámara de niebla de la que Heisenberg había prescindido al teorizar.

Al defender ante Einstein las discontinuidades observadas en las transiciones de un electrón entre niveles de energía (el famoso salto cuántico que tanto odiaba Schrödinger), Heisenberg argumentó que “no se puede hablar en modo alguno de semejante paso [el salto cuántico] con los conceptos tradicionales; no podemos describirlo como un proceso en el espacio y el tiempo”. [19]

Heisenberg parecía aquí defender dos opiniones opuestas: por una parte una apuesta por teorizar a partir de observables y por otra la imposibilidad de describir el salto cuántico con

conceptos tradicionales. Heisenberg estaba experimentando una evolución en su pensamiento semejante a la de Einstein pero con un destino muy distinto: estaba empezando a considerar conveniente el abandono de descripciones de la realidad como procesos en el espacio y el tiempo. Veremos que este pensamiento incipiente en Heisenberg acabará siendo adoptado por Bohr y a constituir el centro de la polémica que nos ocupa.

C. Incertidumbre y realidad

En la primera fase de su investigación Heisenberg se centró en las líneas espectrales observables rechazando, como hemos visto que le reprochó Einstein, analizar qué significaba la traza de un electrón en una cámara de niebla, un fenómeno que aparentaba ser continuo y que por tanto parecía contradecir la cuantificación por la que él abogaba.

Pues bien, cuando Heisenberg aplicó a la traza del electrón la indeterminación que había encontrado en otros procesos de medida se dio cuenta de que para saber en qué posición está el electrón en su camino a lo largo de la cámara de niebla hay que lanzarle fotones que lo sacarán del camino que llevaba lanzándolo a otra trayectoria respecto de la cual no tenemos ninguna certeza. La conclusión de Heisenberg es que el concepto ‘camino del electrón por la cámara de niebla’ no tiene sentido porque al medirlo resulta perturbado e irreconocible. Por fin había encontrado una relación entre la teoría cuántica y un fenómeno aparentemente continuo.

La crítica que Einstein le hizo en la conversación que tuvieron en 1926 parecía desmoronarse. Einstein le acusó de contradecirse: “Se ve usted obligado a afirmar ‘en la cámara de niebla observamos la trayectoria del electrón a lo largo de la cámara’ pero en el átomo no debe de haber, según su opinión, órbita electrónica alguna. Esto es, obviamente un contrasentido”. [20] Ahora Heisenberg ya no se contradecía porque podía afirmar que en ausencia de un experimento que pueda medir la posición del electrón tal posición no existe. Había dejado de basarse en observables y hecho suya la crítica que Einstein le hizo: “solo la teoría decide sobre lo que se puede observar” [21] aunque llegando a unas conclusiones que Einstein no podía compartir ya que para Heisenberg si no hay ningún experimento que pueda medir la posición del electrón es que tal posición no existe. Afirmando esto Heisenberg consumó su abandono de la idea de basarse en magnitudes observables y de una manera muy radical postuló que es la formulación matemática de la teoría la que determina qué es la realidad.

D. Debate Bohr-Heisenberg

Bohr no estaba de acuerdo en que Heisenberg localizara el momento de incertidumbre en el comportamiento impredecible del electrón al ser golpeado por el fotón. Para Bohr era la dualidad onda-partícula la que constituía el centro de la incertidumbre encontrada por Heisenberg.

Es fácil imaginar la reacción de Heisenberg cuando Bohr intentó explicar la incertidumbre acudiendo a fenómenos ondulatorios que estaban entre los antecedentes intelectuales de Bohr pero que para Heisenberg eran conectar su teoría con la de Schrödinger, de la que llegó a decir: “Cuanto más pienso en

los aspectos físicos de la teoría de Schrödinger, más repulsiva me parece” [22]

Sin embargo esta reinterpretación de las ideas de Heisenberg estaba en línea con la investigación que ocupaba a Bohr en esos momentos: la inclusión de los fenómenos ondulatorio y corpuscular en un único marco conceptual al que él llamaba principio de complementariedad. Según ese principio “no es posible observación alguna de los fenómenos atómicos sin provocar en ellos una perturbación esencial” [23] pero no por el acto de medir, como afirmaba Heisenberg, sino por el tipo de experimento que se haya elegido para efectuar la observación. Para Bohr toda observación accede a una visión parcial del fenómeno que pretende ser observado: ondulatoria o corpuscular, pero nunca puede acceder a ambas. La indeterminación descubierta por Heisenberg sería así una consecuencia de la complementariedad, que resultaba ser un fenómeno fundamental e inevitable.

Sin embargo desde el punto de vista de Heisenberg lo que Bohr había hecho es poner su principio de indeterminación al servicio de la causa de la complementariedad al usarlo para mostrar que no se puede hacer una medición simultánea de dos magnitudes observables complementarias: posición y momento. No solo esto sino que Bohr seguía pensando lo que enunció tres años antes, que “toda descripción de los fenómenos naturales debe basarse en ideas que hayan sido introducidas y definidas por la teoría clásica” [24] por lo que la postura radical de Heisenberg de renunciar a conceptos clásicos como “posición” o “trayectoria” quedaba invalidada por Bohr.

Finalmente Heisenberg cedió y aceptó que el punto de vista ondulatorio de Schrödinger permite explicar mejor que el cuántico algunos puntos de su propia argumentación, así que acabó aceptando que la incertidumbre era una consecuencia de la dualidad onda-partícula, como había dicho Bohr.

Esto significaba que Bohr ya tenía completa su teoría atómica en la que la complementariedad, reforzada ahora por el principio de incertidumbre de Heisenberg, ocupaba un lugar central

E. La interpretación de Copenhague

Bohr presentó oficialmente su visión del mundo cuántico en septiembre de 1927 en el Congreso Internacional de Física que se celebró en la ciudad italiana de Como, una visión que llegaría a ser conocida entre los físicos como “interpretación de Copenhague”.

En dicha conferencia Bohr recogió en un único marco conceptual las siguientes piezas

- La mecánica matricial elaborada por Heisenberg, Born y Jordan
- La interpretación estadística hecha por Born de la mecánica ondulatoria de Schrödinger
- El principio de incertidumbre de Heisenberg, pero interpretado según el principio de complementariedad elaborado por Bohr

VI. TERCER EINSTEIN: LA NATURALEZA DE LA REALIDAD. SOLVAY 1927

“Año y medio más tarde encontré a Einstein en el Congreso de Solvay, en Bruselas, donde los fundamentos epistemológicos y filosóficos de la teoría constituyeron, una vez más, el objeto de interesantes discusiones”. [25] Así termina Heisenberg su ensayo “Mecánica cuántica. Conversación con Einstein” introduciéndonos en el escenario donde dio comienzo el debate directo entre Einstein y Bohr, debate que tuvo lugar a partir de octubre de 1927 y que corresponde a una tercera fase del pensamiento de Einstein, en la que el tema que le preocupó fue salvar un concepto clásico de realidad, que veía amenazado por las investigaciones de Heisenberg y Born. Einstein abogaba por una teoría física regida por la causalidad y en la que no hubiera acciones a distancia o influencias no regidas por las limitaciones de la relatividad especial, aspectos que él veía claramente en la base de las teorías de Heisenberg y Born.

Estos elementos filosóficos sobre la naturaleza de la realidad también habían aparecido en el debate que Bohr sostuvo con Schrödinger en septiembre de 1926 pues como el propio Bohr escribió a Fowler “las discusiones se centraron gradualmente en el problema de la realidad física de los postulados de la teoría atómica” [26]

Así, Einstein y Bohr comenzaron a debatir sobre la naturaleza de la realidad desde antes del congreso Solvay de 1927, si bien lo hicieron de forma indirecta, con los interlocutores que más firmemente defendían una opinión contraria a la suya: Schrödinger en el caso de Bohr, y Heisenberg en el caso de Einstein.

El congreso al que hacía referencia Heisenberg tuvo lugar en octubre de 1927 en el Hotel Metropole de Bruselas. Se tituló “Electrones y Fotones” y estaba anunciado que “giraría en torno a la nueva mecánica cuántica y a cuestiones relacionadas con ellas”. Albert Einstein era miembro del comité científico. Durante el congreso Louis De Broglie, Arthur Compton, Max Born, Werner Heisenberg y Erwin Schrödinger presentaron sendos informes, con lo que en el congreso estuvieron representadas tanto las tesis ondulatorias como las cuánticas. De Broglie presentó su tesis de las “ondas piloto” conduciendo a partículas, Schrödinger su crítica a los “saltos cuánticos” discontinuos y Born y Heisenberg presentaron toda su artillería: el formalismo matemático de la mecánica matricial, la reinterpretación de la mecánica ondulatoria y el principio de incertidumbre. Provocadoramente concluyeron su presentación diciendo “consideramos que la mecánica cuántica es una teoría cerrada, cuyos supuestos físicos y matemáticos básicos no son susceptibles de cambio ni modificación alguna” [27]

Durante el congreso Einstein renunció a presentar un informe en parte por “no aprobar el modo puramente estadístico de pensar en el que se asienta la nueva teoría” [28]. Bohr tampoco presentó ningún informe. En realidad Bohr, no había desempeñado realmente ningún papel hasta el momento en el desarrollo teórico de la mecánica cuántica más allá de sus discusiones con Heisenberg.

Tras la presentación de comunicaciones se celebró la primera sesión de la discusión general, introducida por Lorentz

y tratando de centrar la atención en las consecuencias de la mecánica cuántica sobre la causalidad y el determinismo. Bohr dirigió el resto de la sesión presentando su tesis de que la dualidad onda-partícula únicamente podía explicarse desde el principio de incertidumbre que a su vez se asentaba sobre el principio de complementariedad presentado por Bohr en Como. Según Bohr el principio de complementariedad aseguraba la introducción de la mecánica clásica donde fuera posible, aunque, en realidad, al basar su principio de complementariedad en el de incertidumbre, Bohr estaba renunciando implícitamente a la física clásica (en la línea defendida por Heisenberg) aunque dijera que trataba de salvarla.

Einstein no veía que Bohr estuviera tratando con su complementariedad de hacer una síntesis entre las teorías cuánticas y ondulatorias, tal como decía, sino que imponía una visión ondulatoria o cuántica dependiendo del experimento que se eligiera hacer, lo que implicaba que la experimentación dejaba de ser una actividad pasiva para pasar a formar parte de lo observado. Es más, Bohr llegó a afirmar (haciendo suya la tesis de Heisenberg) que en ausencia de observación la realidad es inexistente pues el mundo cuántico carece de propiedades intrínsecas, las propiedades emergen al realizar actos de observación. Por tanto el mundo cuántico sería uno de posibilidades y la observación haría algunas de ellas realidades observables.

Para Einstein, sin embargo la existencia de una realidad independiente del observador era uno de los pilares de la ciencia tal como él la concebía. Por eso, después de haber escuchado tantas teorías contrarias a su postura Einstein pidió la palabra y pasó a demostrar que la interpretación probabilista que Born hacía de la ecuación de ondas de Schrödinger violaba la relatividad especial cuando la usábamos para explicar un sencillo experimento mental que Einstein propuso.

El experimento [29] consiste en un electrón, al que se le ha hecho comportarse como onda mediante hacerle pasar a través de un orificio suficientemente pequeño, y al que se le hace impactar posteriormente en un receptor fotográfico en un punto concreto. Cuando el electrón es detectado por el receptor se comporta como partícula, pero ¿qué ha sucedido con la onda que describía al electrón antes del impacto? La explicación cuántica según la interpretación de Born es que la onda ha “colapsado” en todos los demás lugares excepto en el punto de detección, lo que implicaría que debería de haber una transmisión de información desde el punto de detección hacia el resto de la onda ordenando su colapso inmediato. Esta transmisión instantánea de información violaría la relatividad especial en opinión de Einstein.

El argumento de Einstein indica claramente que su preocupación era referir la onda matemática al mundo físico, a una onda real, tal como hizo Schrödinger, y no a una onda de probabilidad como pretendía Born. Además, no quedaba claro si la interpretación probabilista de Born se refería a una probabilidad intrínseca al electrón o a una probabilidad que reflejaba la ignorancia del experimentador sobre la posición real del electrón.

Born describe [30] en su relato del debate cómo el experimento de Einstein se fue complicando según iba Bohr

replicando su argumentación para llevar el experimento a su terreno y hacer que el instrumento de medida causara perturbaciones en el electrón al pasar por el orificio. Al aparato imaginado por Einstein se le añadió una nueva pantalla con dos ranuras que producirían interferencia solo si ambas estaban abiertas pero no la producían si una de ellas estaba cerrada, lo que permitió a Bohr llevar el experimento a su terreno y concluir que su principio de complementariedad se deducía del experimento mental de Einstein: el experimento condiciona el comportamiento del electrón como onda o como partícula, por tanto hay que elegir entre rastrear el camino de una partícula u observar los fenómenos de la interferencia.

Este argumento de Bohr fue contestado por Einstein con un otro que mostraba, en su opinión, que la teoría cuántica no era una teoría completa: si, según la interpretación de Bohr, los instrumentos de medida y el fenómeno están unidos y son indistinguibles, ¿dónde está la frontera a partir de la cual podemos aplicar la física clásica? Parecía que Bohr podía incluir al instrumento de medida en el mundo cuántico o en el clásico a voluntad según le interesara, y, realmente, Bohr no tenía respuesta a esta cuestión.

Paul Ehrenfest, en carta a Samuel Goudsmith explicó al mes siguiente del congreso que la parte más interesante había sido los debates entre Bohr y Einstein: “ha sido una especie de juego de ajedrez: Einstein aportando, en cada ocasión, nuevos ejemplos con la intención de romper la relación de incertidumbre y Bohr, desde fuera de la niebla filosófica buscando de continuo herramientas para aplastar un intento tras otro” [31]. Estos debates, como recuerda Heisenberg “tuvieron lugar no en el salón de conferencias, sino durante las comidas en el hotel” [32].

En sus memorias sobre las discusiones con Einstein durante este congreso, Bohr apunta al concepto de realidad como el tema fundamental de su debate. Afirmó que, aunque la relatividad especial de Einstein supuso una revisión de los conceptos de espacio y tiempo, no supuso un cambio en las descripciones causales de los fenómenos, pero “en la teoría cuántica, la interacción incontrolable entre los objetos y los instrumentos de medida nos fuerza a renunciar a ella. Esto no supone de ninguna manera una limitación en el ámbito de aplicación de la mecánica cuántica... sino una generalización racional de la misma idea de causalidad” [33]

Esta “interacción incontrolable entre los objetos y los instrumentos de medida” a la que se refería Bohr, causa de la indeterminación y consecuencia de la complementariedad, sería su argumento principal contra las tesis de Einstein en 1927, aunque, como veremos, tuvo que renunciar a él en 1930.

El congreso no consiguió determinar si Einstein o Bohr estaban en lo cierto. Ninguno consiguió derrotar completamente las tesis contrarias. Para Bohr “Einstein se aferraba a ideales como único camino” para enfrentarse a los nuevos fenómenos atómicos” [34]. Einstein por su parte “no quería admitir que por necesidad fuera fundamentalmente imposible conocer todos los parámetros necesarios para una completa determinación de los procesos y se esforzaba por excogitar experimentos en los que las relaciones de indeterminación no tienen vigencia” [35]. Louis de Broglie, no encontrando apoyo a su idea de las “ondas piloto”, se unió a la

interpretación de Bohr. Heisenberg reafirmó su apoyo a la interpretación de Bohr. El resultado del congreso es que el Instituto Bohr de Copenhague se convirtió en el centro de difusión de la teoría cuántica y la versión publicada en abril 1928 de la conferencia que Bohr pronunció en Como en una especie de manifiesto de la teoría cuántica.

VII. SOLVAY 1930

En este congreso, el sexto congreso Solvay, sobre las propiedades magnéticas de la materia, celebrado en Bruselas en octubre de 1930, la discusión entre Einstein y Bohr continuó y adquirió un “giro dramático” por usar la expresión que usa Bohr mismo en su narración [36] de estos sucesos.

El dramatismo se debe a que el nuevo experimento mental que Einstein presentó en este congreso parecía imbatible y era asombrosamente simple: “Imagine una caja de luz. Pese la caja. Deje escapar un fotón. Vuelva a pesar la caja”. Bohr se dio cuenta inmediatamente de que Einstein estaba usando su famosa ecuación $E=mc^2$, que mostraba la equivalencia entre masa y energía, para determinar la diferencia de masa de la caja mediante pesarla antes y después de dejar escapar un fotón, lo cual nos permitiría conocer la energía del fotón escapado. El momento de la salida del fotón se podría averiguar porque el reloj situado en la caja que había regulado la puerta por la que había escapado el fotón estaba sincronizado con el del observador. No había ninguna incertidumbre. Conocíamos todo lo que había que conocer del fotón escapado.

El impacto que causó este experimento en Bohr fue demoledor. “Para Bohr se trató casi de un shock”, comentó un colaborador de Bohr [37]. Sin embargo, el “giro dramático” al que Bohr se refería sucedió porque Bohr se dio cuenta de que al disminuir de peso la caja había sucedido una dilatación gravitacional del tiempo tal como Einstein mostró con su relatividad general. Dicha dilatación era una fuente de incertidumbre que no había sido considerada por Einstein y que impedía conocer con total certeza la posición y trayectoria del fotón.

Einstein acabó aceptando que la teoría cuántica “contiene, sin la menor duda, una pieza importante de verdad última” [38] si bien al mismo tiempo pensaba que no contenía toda la verdad, que era una teoría incompleta. De hecho, los siguientes esfuerzos de Einstein fueron encaminados precisamente hacia este punto: demostrar que la teoría cuántica no era una teoría completa.

A partir del Congreso Solvay de 1930 hubo muy poca comunicación directa entre Bohr y Einstein. El ascenso de los nazis al poder en Alemania supuso que la Universidad de Gotinga, cuna intelectual de Heisenberg y de la mecánica cuántica, “dejara de existir” [39] por una persecución contra la “física judía” que afectó al propio Heisenberg, Max Born y Albert Einstein, que el 7 de octubre de 1933 abandonó definitivamente Europa y se instaló en Princeton, Estados Unidos, donde fue invitado a trabajar como profesor en el recientemente creado Instituto de Estudios Avanzados.

La neutralidad danesa durante la guerra hizo que el Instituto Bohr de Copenhague pudiera continuar su normal

funcionamiento incluso recibiendo a algunos de los científicos exiliados de Alemania.

Desde su nuevo emplazamiento Einstein lanzó su último ataque a la teoría cuántica.

VIII. NUEVO DESAFÍO A LA TEORÍA CUÁNTICA DESDE PRINCETON

Junto con dos colaboradores suyos en Princeton, Boris Podolski y Nathan osen, Einstein publicó en 1935 el famoso artículo "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", que por las iniciales de los apellidos de sus tres autores ha pasado a la historia conocido como EPR. En dicho trabajo Einstein parecía demostrar la incompletitud de la mecánica cuántica mediante la propuesta de un experimento en el que se trataba de medir la posición y el momento de dos partículas.

El artículo comenzaba con estas palabras: "Cualquier consideración sería de una teoría física debe tener en cuenta la distinción entre la realidad objetiva, que es independiente de cualquier teoría, y los conceptos físicos con los que opera la teoría. Estos conceptos pretenden corresponderse con la realidad, y por medio de estos conceptos nos construimos una imagen de la realidad" [40] lo cual era una toma de posición en radical oposición a Bohr.

El trabajo EPR se basaba en lo que denominaba elementos de realidad, que consisten en aquellos sucesos que pueden ser predichos en un sistema sin necesidad de perturbarlo, e insiste en que un universo así tendría la característica llamada localidad, es decir, que algo que sucede en un lugar no puede afectar instantáneamente a algo que sucede en un lugar lejano a él ya que la transmisión de información está limitada por las reglas de la relatividad especial, en particular por la limitación de la velocidad de la luz.

EPR contenía un método para determinar la posición y el momento de una partícula sin efectuar medidas directamente sobre ella. Esto, que parecía un argumento contra el principio de incertidumbre, en realidad era un argumento contra la afirmación de que la teoría cuántica era completa y contra la afirmación de que en ausencia de medida no existe posición ni velocidad.

Pareció un golpe de muerte a la teoría cuántica, de hecho Paul Dirac dijo "ahora tenemos que comenzar todo de nuevo porque Einstein ha demostrado que no funciona" [41]

A. La respuesta de Bohr a EPR

El experimento propuesto por Einstein además había dado de lleno en una duda interna que Bohr no había resuelto. En su argumentación en el congreso Solvay de 1927 Bohr trató de llevar el experimento de Einstein a su terreno para indicar que la perturbación del aparato de medida en el electrón introduce una incertidumbre que hace imposible la medida exacta. Sin embargo en 1930 Bohr encontraba "imprecisos y engañosos enunciados tales como el de que la 'observación perturba el fenómeno'", y añadía que "los fenómenos atómicos de la naturaleza nos han enseñado que no cabe emplear la palabra *fenómeno* sin dejar al mismo tiempo perfectamente en claro la

clase de experimento o el medio de observación que en cada caso ha de emplearse." [42]

Bohr abandonó progresivamente la idea de que la observación perturbe el fenómeno pero para cuando Einstein publicó su trabajo conjunto con Podolski y Rosen no tenía aún elaborado un concepto de *realidad* y seguramente por eso la respuesta que dio al trabajo EPR fue muy poco clara y con "dificultades de expresión", como reconocería el propio Bohr. [43]

Bohr se daba cuenta de que hablar de que el 'experimento perturba el fenómeno' le acercaba a la postura defendida por Einstein ya que dotaba de realidad a un fenómeno que, efectivamente, con su teoría no podía describir completamente, por lo que se decantó por asumir como propia la opinión de Heisenberg y afirmar que mientras no hay medida de la posición o el momento de una partícula dicha partícula no posee esas propiedades, negando así la existencia de una realidad que la teoría cuántica tuviera que describir.

Esa es la razón de que en la contestación de Bohr a EPR, titulada exactamente igual que el trabajo al que rebatía ("Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete") Bohr afirmara que no había "mechanical disturbance of the system under investigation during the last critical stage of the measuring process" sino "an influence on the very conditions which define the possible types of predictions regarding the future behaviour of the system". He escogido mantener la redacción original de Bohr para apreciar las dificultades de expresión que él mismo reconoce al introducir el principio de complementariedad como argumento en lugar de la indeterminación durante el proceso de medida.

Bohr con este argumento no necesitaba refutar que el sistema de medición de Einstein hubiera conseguido medir simultáneamente posición y velocidad anulando la indeterminación cuántica. Bohr admite que se pudieran medir, pero, dado que la discusión de fondo es sobre el concepto de realidad, propone en su réplica un nuevo concepto de realidad. En realidad no era tan nuevo, porque es el mismo que Heisenberg desarrolló en 1926 pero que Bohr, que aún seguía influido por su idea de referir conceptos a la física clásica se negó a aceptar. Ahora lo hacía suyo: los momentos y posiciones medidos por Einstein solo son reales al interactuar con un aparato de medida. El criterio de realidad a-priori propuesto por Einstein para acusar de incompleta a la teoría cuántica no vale, según Bohr, porque la realidad solo empieza a existir al efectuar una medición.

B. Einstein influye en críticas de Schrödinger a la teoría cuántica. Genesis del experimento mental del gato.

Schrödinger estuvo completamente de acuerdo con lo que Einstein defendía en el trabajo EPR. Hubo un gran intercambio de correspondencia entre Schrödinger y Einstein durante el verano de 1935 en el que ambos maduraron nuevos argumentos contra la teoría cuántica por no ser "coherente con la teoría de la relatividad, es decir, con una velocidad de transmisión finita de todas las influencias". En una de dichas cartas Schrödinger acuñó el término "entrelazamiento" (*verschränkung*) para

describir las correlaciones entre partículas a las que hacía referencia el experimento EPR.

Los nuevos experimentos mentales que Einstein elaboró en dicho intercambio con Schrödinger enfatizan el papel de la separatividad, algo que no estaba tan claramente destacado en el trabajo EPR.

Einstein ideó el experimento mental acerca de dos cajas cerradas, una de ellas vacía y otra conteniendo una pelota. Nuestro desconocimiento de lo que hay en el interior de cada caja nos hace afirmar que cada caja tiene un 50% de probabilidades de contener la pelota, pero eso no tiene ninguna relación con la realidad física. La realidad física es que una caja contiene una pelota y otra está vacía. Nuestra descripción estadística no es una descripción de la realidad, tan solo de nuestra incapacidad para conocerla.

Este experimento fue mejorado por Einstein en el experimento del barril de pólvora inestable que explotará espontáneamente el año próximo. En una descripción cuántica dentro de un año el barril se hallará en un estado de haber explotado y no haber explotado simultáneamente, lo cual, aparte de ser absurdo, no es una adecuada descripción de la realidad ya que el barril ha explotado o no ha explotado. El objetivo era criticar que la teoría cuántica manejara probabilidades y superposición de estados donde lo que realmente había era certidumbre de estados.

Schrödinger publica en noviembre y diciembre de 1935 tres ensayos, en los que reelabora los experimentos de las dos cajas y del barril de pólvora en su famoso experimento del gato con el mismo objetivo de enfatizar que las descripciones cuánticas ignoran una realidad constatable.

Estos experimentos volvían a poner en primer plano que Bohr seguía sin disponer de una teoría que determinara dónde terminaba el mundo cuántico y dónde empezaba el clásico, tal como Einstein criticó en el congreso Solvay de 1927. Claramente a Bohr no le interesaba elaborar una teoría física de la realidad, que sí parecía ser el interés de Einstein, sino solamente una teoría que describiera los fenómenos que observamos.

IX. CONCLUSIÓN

El punto de vista final de Bohr sobre el debate lo resume muy bien él mismo: “No existe el mundo cuántico. Solo hay una descripción mecánica cuántica” [44]

El punto de vista de Einstein también queda perfectamente descrito en sus palabras: “Resulta difícil ver las cartas con las que juega el Todopoderoso. Pero yo no creo ni por un instante que, como parece afirmar la presente teoría cuántica, tire los dados o recurra a dispositivos ‘telepáticos’” [45]. “La física debe representar, ajena a toda acción fantasmal a distancia, la realidad en el tiempo y el espacio” [46]

Einstein falleció en 1955, Bohr en 1962. Desde el final de su debate hasta ahora la teoría cuántica ha demostrado ser probablemente la teoría más exitosa de la historia. En la actualidad somos capaces de controlar el salto cuántico y estamos empezando a experimentar con las posibilidades prácticas del entrelazamiento, la computación cuántica y la

teleportación. Pero los éxitos de su aplicación no deben hacernos olvidar que aún seguimos sin entender en qué consiste la realidad que esconden dichos fenómenos. Como expresa muy bien Roger Penrose: “somos afortunados porque hemos dado con formulaciones matemáticas que concuerdan con la naturaleza de forma sobresaliente, pero la unificación de la naturaleza como un todo en una única formulación matemática puede que solo sea una alucinación. Otros, en cambio puede que piensen que es precisamente el concepto de ‘realidad física’, de una naturaleza objetiva e independiente de cómo decidamos observarla lo que es realmente una alucinación” [47]. El debate sobre la naturaleza de la realidad continúa.

REFERENCIAS

- [1] BOHR (1970) p. 202
- [2] FERNANDEZ-RAÑADA (2004) p. 67
- [3] EVE (1939) p. 223
- [4] KUMAR (2012) p. 152
- [5] SANCHEZ RON (2005) p. 438
- [6] KUMAR (2012) p. 174
- [7] BORN (2005) p. 22
- [8] KUMAR (2012) p. 198
- [9] BOHR (1970) p. 206
- [10] CASSINELLO y SANCHEZ (2012) p. 20
- [11] FERNANDEZ-RAÑADA (2004) p. 87
- [12] HEISENBERG (1975) p. 94
- [13] SANCHEZ RON (2005) p. 470
- [14] CASSINELLO y SANCHEZ (2012) p. 37
- [15] SANCHEZ RON (2005) p. 471-2
- [16] FERNANDEZ-RAÑADA (2004) p. 63
- [17] HEISENBERG (1975) p. 74-88
- [18] HEISENBERG (1975) p. 80
- [19] HEISENBERG (1975) p. 85
- [20] HEISENBERG (1975) p. 84
- [21] HEISENBERG (1975) p. 80
- [22] FERNANDEZ-RAÑADA (2004) p. 89-90
- [23] KUMAR (2012) p. 328
- [24] KUMAR (2012) p. 325
- [25] HEISENBERG (1975) p. 88
- [26] SANCHEZ RON (2005) p. 470
- [27] BACIGALUPPI y VALENTINI, p. 437
- [28] KUMAR (2012) p. 340
- [29] SACHS (1991) p. 103-106
- [30] BOHR (1970) p. 212-230
- [31] KUMAR (2012) p. 364
- [32] HEISENBERG (1975) p. 100-101
- [33] BOHR (1970) p. 211
- [34] KUMAR (2012) p. 365
- [35] HEISENBERG (1975) p. 101
- [36] BOHR (1970) p. 224-230
- [37] KUMAR (2012) p. 373
- [38] KUMAR (2012) p. 379
- [39] KUMAR (2012) p. 389
- [40] SANCHEZ RON (1995) p. 206
- [41] KUMAR (2012) p. 409
- [42] HEISENBERG (1975) p. 130-131
- [43] KUMAR (2012) p. 407

- [44] PETERSEN (1985) p. 305
 [45] FÖLSING (1997) p. 699
 [46] BORN (2005) p. 155
 [47] PENROSE (2004) p. 1027

X. BIBLIOGRAFÍA

- ACZEL, A. "Entrelazamiento". Crítica. Barcelona. 2004
 BACIGALUPPI, G. y VALENTINI, A. "Quantum Theory at the Crossroads: Reconsidering the 1927 Solvay Conference". arXiv:quant-ph/0609184v1, 24 de septiembre. 2006.
 BOHR, N. "Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics" en SCHLIPP, P. A. "Albert Einstein . Philosopher-Scientist". MFJ Books. New York. 1970
 BORN, M. "The Born-Einstein Letters 1916-1955: Friendship, Politics and Physics in Uncertain Times". Taylor and Francis. Londres. 2005
 CASSINELLO A, SANCHEZ J.L. "La realidad cuántica" Crítica. Barcelona. 2012
 EVE, A. S. "Rutherford: Being the Life and Letters of the Rt. Hon. Lord Rutherford". Cambridge University Press. Cambridge. 1939
 FERNANDEZ-RAÑADA, A. "Heisenberg. Ciencia, incertidumbre y conciencia". Nivola. Madrid. 2004
 FÖLSING, A. "Albert Einstein: A Biography". Viking. Londres. 1997.
 FRENCH, A. P. y KENNEDY, P. J. (editores) "Niels Bohr: A Centenary. Harvard University Press. Cambridge. USA. 1985.
 HEISENBERG, W "Diálogos sobre la física atómica". Biblioteca de Autores Cristianos. Madrid. 1975
 KUMAR, M. "Quantum. Einstein, Bohr y el gran debate sobre la naturaleza de la realidad". Kairos. Barcelona. 2012
 MERMIN, D. "Boojums all the way through: Communicating Science in a Prosaic Age". Cambridge University Press. Cambridge. 2003
 PETERSEN, A. "The Philosophy of Niels Bohr" en French y Kennedy (1985)
 PENROSE, R. "The Road to Reality". Jonathan Cape. Londres. 2004
 SACHS, M "Einstein versus Bohr. The continuing controversies in physics" Open Court. Illinois (USA). 1991.
 SANCHEZ RON, J. M. "Historia de la física cuántica I. El periodo fundacional (1860-1926)". Crítica. Barcelona. 2005
 SANCHEZ RON, J. M. "Las filosofías de los creadores de la mecánica cuántica" en "La Filosofía de los Científicos", Thémata: Revista de filosofía, número 14, páginas 197-222. 1995