

Tabla de Contenidos

Historia de las matemáticas	1
Contenidos	1
Metodología	1
Bibliografía complementaria	1
Parte I Conjuntos	1
(1) Haga una breve semblanza (1000 palabras) de Georg Cantor apoyándose en materiales que encuentre en la red –e incluya la referencia	2
(2) Explique de qué modo se originan las ideas de Cantor sobre el infinito en el estudio de las series trigonométricas	2
(3) Explique el concepto cantoriano de potencia (numerosidad) y los distintos tipos de infinito que permite distinguir	2
(4) Según Torretti, ¿qué dos vías confluyeron en la formación del concepto de transfinito?	2
(5) ¿Por qué el teorema del buen orden es central para el programa de Cantor?	2
(6) ¿Por qué los cardinales transfinitos son distintos de los ordinales?	2
(7) ¿Qué es la hipótesis del continuo y cómo afecta al programa de Cantor?	2
(8) ¿Por qué no toda “pluralidad bien definida” sería un conjunto en el sentido de Cantor?	2
(9) Explique la controversia entre Poincaré y Zermelo a propósito del axioma de selección	2
(10) ¿Por qué se hizo necesario definir axiomáticamente la teoría de conjuntos?	2
Materiales de apoyo	2
Parte II Cálculos	2
(11) Haga una breve semblanza (1000 palabras) de David Hilbert apoyándose en materiales que encuentre en la red –e incluya la referencia-	3
(12) Explique la importancia de los conceptos de consistencia, punto de vista finito y razonamiento sustantivo en el programa de Hilbert	3
(13) Explique cuál era el proyecto de Gottlob Frege y en qué sentido su definición de número introdujo una contradicción que lo arruinaría	3
(14) Explique las paradojas de Cantor y Burali-Forti y en qué sentido afectaban al concepto cantoriano de transfinito. Explique también en qué sentido la teoría russelliana de los tipos proporcionaba una solución y a qué coste	3
(15) ¿Por qué el concepto de aseveración funcional y el modo recursivo de pensar defendidos por Thoralf Skolem permitirían una fundamentación hilbertiana de la aritmética?	3
(16) ¿En qué consiste el problema de la decisión? ¿En qué sentido lo resuelve E. Post para el cálculo proposicional?	3
(17) ¿De qué modo prueba Gödel que el cálculo predicativo de primer orden es completo? ¿Por qué la prueba no es constructiva?	3
(18) ¿Qué es, para Hilbert, la teoría de la prueba? ¿En qué sentido el procedimiento de gödelización utilizado en la prueba de los teoremas de incompletitud ejemplifica esta teoría hilbertiana?	3
(19) Explique y comente la siguiente afirmación de Torretti (p. 352): el primer teorema de incompletitud de Gödel “habrá de parecernos mucho más grave si creemos que P y los sistemas afines comprende todos los recursos de que dispone el hombre para conocer con certeza una verdad sobre números no incluida ya en la aritmética finitista”	3
(20) ¿En qué sentido la tesis de Church constituye “una decisión de aceptar la computabilidad como criterio de calculabilidad” (p. 376)?	3
(21) ¿Qué quiere decir que “el problema de la detención es insoluble”?	3
(22) Gerhard Gentzen utilizó la inducción transfinita en sus dos demostraciones de la consistencia de la aritmética formalizada. Explique y comente la siguiente observación de Torretti (p. 319): “Si el programa de Hilbert acaba recurriendo al transfinito, ¿por qué tantos	

melindres y reservas ante el paraíso heredado de Cantor? ¿por qué no instalarse en él, alegremente, de una vez por todas?"	4
Materiales de Apoyo	4
Sumario del libro de Torretti	4

Historia de las matemáticas

Asignatura optativa del Grado de Matemáticas de la UNED.

- [Guía de la asignatura](#)

Contenidos

1. Historia y paradojas de la Teoría de conjuntos (Cantor-Zermelo)
2. El desarrollo del programa de Hilbert para la Fundamentación de la matemática

Metodología

El curso está estructurado en torno al cuestionario sobre el texto de Torretti: son 22 preguntas que el estudiante puede resolver en 11 semanas.

Cada estudiante debe resolver ambas preguntas (dedicando unas 500 palabras a cada respuesta) y colgarlas en el foro dedicado a ello en el curso virtual como prueba de evaluación continua. Sin embargo, las preguntas no analizan con igual intensidad todas las partes del libro. Las diez primeras se concentran sobre las 100 primeras páginas. Pero sólo hay cuatro preguntas sobre las 70 páginas siguientes. Sobre los tres últimos capítulos del libro (2.10, 2.11 y 2.12) se formulan apenas tres preguntas generales, pero su estudio requiere bastante profundidad. Como principio general, no se pretende que el alumno maneje o memorice los muchos formalismos y demostraciones que presenta Torretti, sino que debe trabajar con ellos para poder responder con precisión a las preguntas planteadas en el cuestionario. Se recomienda que cada estudiante vaya avanzando y resolviendo el cuestionario a su paso, sin perder de vista el calendario de referencia del curso. Cuando le surjan dudas, debe colgarlas en el foro dedicado al efecto en el curso virtual.

Bibliografía complementaria

Si el alumno desea tener una introducción accesible al conjunto de la Historia de la matemática, puede utilizar el libro de Hans Wussing, *Lecciones de Historia de la matemática*, Madrid, Siglo XXI, 1998.

Una recopilación de textos originales que le servirá para ilustrarla es la de S. Hawking, *Dios creó los números*, Barcelona, Crítica, 2006.

Buena parte de los textos originales en los que se apoya el libro de Torretti se encuentran recopilados en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard, Harvard University Press, 1990.

Parte I | Conjuntos

(1) Haga una breve semblanza (1000 palabras) de Georg Cantor apoyándose en materiales que encuentre en la red -e incluya la referencia

- <https://plato.stanford.edu/search/search?query=%22georg+cantor%22>

(2) Explique de qué modo se originan las ideas de Cantor sobre el infinito en el estudio de las series trigonométricas

- [Fourier, Cantor, las series trigonométricas y la teoría de conjuntos](#)

(3) Explique el concepto cantoriano de potencia (numerosidad) y los distintos tipos de infinito que permite distinguir

(4) Según Torretti, ¿qué dos vías confluyeron en la formación del concepto de transfinito?

(5) ¿Por qué el teorema del buen orden es central para el programa de Cantor?

(6) ¿Por qué los cardinales transfinitos son distintos de los ordinales?

(7) ¿Qué es la hipótesis del continuo y cómo afecta al programa de Cantor?

(8) ¿Por qué no toda “pluralidad bien definida” sería un conjunto en el sentido de Cantor?

(9) Explique la controversia entre Poincaré y Zermelo a propósito del axioma de selección

(10) ¿Por qué se hizo necesario definir axiomáticamente la teoría de conjuntos?

Materiales de apoyo

- [Georg Cantor, el Constructor del Paraíso](#), TFG de José Javier González López

Parte II | Cálculos

- (11) Haga una breve semblanza (1000 palabras) de David Hilbert apoyándose en materiales que encuentre en la red -e incluya la referencia-**
- (12) Explique la importancia de los conceptos de consistencia, punto de vista finito y razonamiento sustantivo en el programa de Hilbert**
- (13) Explique cuál era el proyecto de Gottlob Frege y en qué sentido su definición de número introdujo una contradicción que lo arruinaría**
- (14) Explique las paradojas de Cantor y Burali-Forti y en qué sentido afectaban al concepto cantoriano de transfinito. Explique también en qué sentido la teoría russelliana de los tipos proporcionaba una solución y a qué coste**
- (15) ¿Por qué el concepto de aseveración funcional y el modo recursivo de pensar defendidos por Thoralf Skolem permitirían una fundamentación hilbertiana de la aritmética?**
- (16) ¿En qué consiste el problema de la decisión? ¿En qué sentido lo resuelve E. Post para el cálculo proposicional?**
- (17) ¿De qué modo prueba Gödel que el cálculo predicativo de primer orden es completo? ¿Por qué la prueba no es constructiva?**
- (18) ¿Qué es, para Hilbert, la teoría de la prueba? ¿En qué sentido el procedimiento de gödelización utilizado en la prueba de los teoremas de incompletitud ejemplifica esta teoría hilbertiana?**
- (19) Explique y comente la siguiente afirmación de Torretti (p. 352): el primer teorema de incompletitud de Gödel “habrá de parecernos mucho más grave si creemos que P y los sistemas afines comprende todos los recursos de que dispone el hombre para conocer con certeza una verdad sobre números no incluida ya en la aritmética finitista”**
- (20) ¿En qué sentido la tesis de Church constituye “una decisión de aceptar la computabilidad como criterio de calculabilidad” (p. 376)?**
- (21) ¿Qué quiere decir que “el problema de la detención es insoluble”?**

(22) Gerhard Gentzen utilizó la inducción transfinita en sus dos demostraciones de la consistencia de la aritmética formalizada. Explique y comente la siguiente observación de Torretti (p. 319): “Si el programa de Hilbert acaba recurriendo al transfinito, ¿por qué tantos melindres y reservas ante el paraíso heredado de Cantor? ¿por qué no instalarse en él, alegremente, de una vez por todas?”

Materiales de Apoyo

- [Hilbert's Program](#), Stanford Encyclopedia of Philosophy

Sumario del libro de Torretti

Prefacio	xi
1 CONJUNTOS	
1.1 La palabra ‘conjunto’ en la matemática del siglo XX	1
1.2 ‘Conjunto’ (‘Menge’) en el vocabulario de Cantor	7
1.3 Series trigonométricas	13
1.4 Diversos infinitos	21
1.5 Aritmética transfinita	29
1.6 Paradojas y filosofemas	49
1.7 El Teorema del Buen Orden y el Axioma de Selección	63
1.8 Axiomas para una teoría de conjuntos	71
1.8.1 Zermelo (1908)	71
1.8.2 ¿Qué está ‘bien definido’?	80
1.8.3 El Axioma de Reemplazo	87
1.8.4 Aportes de von Neumann	

.....	
.....90	
1.8.5 Zermelo (1930)	
.....	
.....102	
2 CÁLCULOS	
2.1 El programa de Hilbert	
.....	
..... 115	
2.2 Escritura conceptual	
.....	
.....129	
2.3 Fundamentos de la aritmética	
.....	
..145	
2.3.1 Peano (1889)	
.....	
.....145	
2.3.2 Dedekind (1888)	
.....	
.....151	
2.3.3 Frege (1884)	
.....	
.....159	
2.4 La teoría de los tipos lógicos	
.....	
177	
2.5 Aritmética finitista	
.....	
..... 211	
2.6 Pruebas de consistencia	
.....	
.....219	
2.6.1 Ackermann (1925)	
.....	
.....219	
2.6.2 Von Neumann (1927)	
.....	
.....232	
2.6.3 Herbrand (1931b)	
.....	
.....241	
2.7 El Entscheidungsproblem y el Teorema de Herbrand	
.....247	
2.8 El cálculo predicativo de primer orden es completo	
.....273	
2.9 El programa de Hilbert visto más de cerca	
.....295	
2.9.1 Axiomatización y formalización	

.....	29
5	
2.9.2 Balbuceos formales (Hilbert 1904)	
.....	297
2.9.3 Teoría de la prueba	
.....	
.....	304
2.9.4 La investigación de la consistencia de la matemática formalizada, a la luz del descubrimiento de Gödel ..	316
2.10 Los Teoremas de Incompletud de Gödel	
.....	321
2.10.1 Preliminares	
.....	
.....	321
2.10.2 La incompletud de la aritmética	
.....	326
2.10.3 La indemostrabilidad de la consistencia	
.....	354
2.11 Funciones computables	
.....	
.....	359
2.11.1 Funciones recursivas generales	
.....	361
2.11.2 La Tesis y el Teorema de Church	
.....	369
2.11.3 Las máquinas de Turing	
.....	
.....	381
2.11.4 Diagramas y ejemplos	
.....	
.....	383
2.11.5 Demostración de resultados	
.....	
.407	
2.12 Consistencia de la aritmética: la prueba de Gentzen	
.....	421
2.12.1 Un cálculo aritmético	
.....	
.....	423
2.12.2 Reducciones	
.....	
.....	429
2.12.3 Orden de las derivaciones e inducción transfinita	
.....	441
APÉNDICES	
I Las definiciones cantorianas de ‘conjunto bien ordenado’	
.....	459
II Más sobre el buen orden	

.....	
.....461	
III La cardinalidad de la segunda clase de ordinales	
.....463	
IV El argumento de Burali-Forti	
.....	
...465	
V La segunda demostración del Teorema del Buen Orden (Zermelo 1908)	
.....468	
VI Los axiomas de Zermelo (1908a)	
.....	
.471	
VII Independencia del Axioma de Selección (Fraenkel 1922a)	
.....472	
VIII Definición por inducción transfinita (von Neumann 1928)	
.....476	
IX El cálculo predicativo	
.....	
.....480	
X Axiomas de la lógica (Frege 1879)	
.....5	
02	
XI Definiciones recursivas (Dedekind 1888)	
.....504	
XII Extensión y recorrido (Frege 1891, 1893a)	
.....509	
XIII Fórmulas prenexas	
.....	
.....516	
XIV El cálculo de predicados monádicos es decidible	
.....522	
XV El cálculo proposicional es completo	
.....525	
XVI Una forma abstracta del Primer Teorema de Incompletud de Gödel (Smullyan 1992)	
.....527	
XVII Números de Gödel: Una alternativa	
.....529	
XVIII Los axiomas del cálculo de primer orden investigado por Gödel (1930)	
son derivables en el cálculo	
de secuentes propuesto por Gentzen (1938)	
.....531	
XIX Algunas ideas de Brouwer	
.....	
.....535	
GLOSARIO	
.....	
.....541	
OBRAS CITADAS	
.....	
.....551	
ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS	

.....573
ÍNDICE DE PERSONAS Y CONCEPTOS
.....575

From:
<https://filosofias.es/wiki/> - filosofias.es

Permanent link:
<https://filosofias.es/wiki/doku.php/math/historia-de-las-matematicas?rev=1634557739>

Last update: 2021/10/18 11:48

