

# Tabla de Contenidos

<b>Historia de las matemáticas</b> .....	1
<b>Contenidos</b> .....	1
<b>Metodología</b> .....	1
<b>Cómo citar en matemáticas</b> .....	1
<b>Recursos</b> .....	2
<b>Bibliografía complementaria</b> .....	2
<b>Parte I   Conjuntos</b> .....	3
(1) Haga una breve semblanza (1000 palabras) de Georg Cantor apoyándose en materiales que encuentre en la red –e incluya la referencia .....	4
(2) Explique de qué modo se originan las ideas de Cantor sobre el infinito en el estudio de las series trigonométricas .....	4
(3) Explique el concepto cantoriano de potencia (numerosidad) y los distintos tipos de infinito que permite distinguir .....	4
(4) Según Torretti, ¿qué dos vías confluyeron en la formación del concepto de transfinito? .....	4
(5) ¿Por qué el teorema del buen orden es central para el programa de Cantor? .....	4
(6) ¿Por qué los cardinales transfinitos son distintos de los ordinales? .....	4
(7) ¿Qué es la hipótesis del continuo y cómo afecta al programa de Cantor? .....	4
(8) ¿Por qué no toda “pluralidad bien definida” sería un conjunto en el sentido de Cantor? .....	4
(9) Explique la controversia entre Poincaré y Zermelo a propósito del axioma de selección .....	4
(10) ¿Por qué se hizo necesario definir axiomáticamente la teoría de conjuntos? .....	4
Materiales de apoyo .....	4
<b>Parte II   Cálculos</b> .....	4
(11) Haga una breve semblanza (1000 palabras) de David Hilbert apoyándose en materiales que encuentre en la red –e incluya la referencia- .....	5
(12) Explique la importancia de los conceptos de consistencia, punto de vista finito y razonamiento sustantivo en el programa de Hilbert .....	5
(13) Explique cuál era el proyecto de Gottlob Frege y en qué sentido su definición de número introdujo una contradicción que lo arruinaría .....	5
(14) Explique las paradojas de Cantor y Burali-Forti y en qué sentido afectaban al concepto cantoriano de transfinito. Explique también en qué sentido la teoría russelliana de los tipos proporcionaba una solución y a qué coste .....	5
(15) ¿Por qué el concepto de aseveración funcional y el modo recursivo de pensar defendidos por Thoralf Skolem permitirían una fundamentación hilbertiana de la aritmética? .....	5
(16) ¿En qué consiste el problema de la decisión? ¿En qué sentido lo resuelve E. Post para el cálculo proposicional? .....	5
(17) ¿De qué modo prueba Gödel que el cálculo predicativo de primer orden es completo? ¿Por qué la prueba no es constructiva? .....	5
(18) ¿Qué es, para Hilbert, la teoría de la prueba? ¿En qué sentido el procedimiento de gödelización utilizado en la prueba de los teoremas de incompletitud ejemplifica esta teoría hilbertiana? .....	5
(19) Explique y comente la siguiente afirmación de Torretti (p. 352): el primer teorema de incompletitud de Gödel “habrá de parecernos mucho más grave si creemos que P y los sistemas afines comprende todos los recursos de que dispone el hombre para conocer con certeza una verdad sobre números no incluida ya en la aritmética finitista” .....	5
(20) ¿En qué sentido la tesis de Church constituye “una decisión de aceptar la computabilidad como criterio de calculabilidad” (p. 376)? .....	5
(21) ¿Qué quiere decir que “el problema de la detención es insoluble”? .....	5
(22) Gerhard Gentzen utilizó la inducción transfinita en sus dos demostraciones de la	

consistencia de la aritmética formalizada. Explique y comente la siguiente observación de Torretti (p. 319): “Si el programa de Hilbert acaba recurriendo al transfinito, ¿por qué tantos melindres y reservas ante el paraíso heredado de Cantor? ¿por qué no instalarse en él, alegremente, de una vez por todas?” ..... 6

Materiales de Apoyo ..... 6

**Sumario del libro de Torretti** ..... 6

# Historia de las matemáticas

Asignatura optativa del Grado de Matemáticas de la UNED.

- [Guía de la asignatura](#)
- [Guía II](#)
- [Crisis de la razón y racionalismos contemporáneos](#), Joaquín Herrero

## Contenidos

1. Historia y paradojas de la Teoría de conjuntos (Cantor-Zermelo)
2. El desarrollo del programa de Hilbert para la Fundamentación de la matemática

Acceso a [Materiales complementarios](#)

Acceso a [Foro](#)

## Metodología

El curso está estructurado en torno al cuestionario sobre el texto de Torretti: son 22 preguntas que el estudiante puede resolver en 11 semanas.

Cada estudiante debe resolver ambas preguntas (dedicando unas 500 palabras a cada respuesta) y colgarlas en el foro dedicado a ello en el curso virtual como prueba de evaluación continua. Sin embargo, las preguntas no analizan con igual intensidad todas las partes del libro. Las diez primeras se concentran sobre las 100 primeras páginas. Pero sólo hay cuatro preguntas sobre las 70 páginas siguientes. Sobre los tres últimos capítulos del libro (2.10, 2.11 y 2.12) se formulan apenas tres preguntas generales, pero su estudio requiere bastante profundidad. Como principio general, no se pretende que el alumno maneje o memorice los muchos formalismos y demostraciones que presenta Torretti, sino que debe trabajar con ellos para poder responder con precisión a las preguntas planteadas en el cuestionario. Se recomienda que cada estudiante vaya avanzando y resolviendo el cuestionario a su paso, sin perder de vista el calendario de referencia del curso. Cuando le surjan dudas, debe colgarlas en el foro dedicado al efecto en el curso virtual.

## Cómo citar en matemáticas

Nuestro tutor Antonio Juano me hacía una observación muy acertada la semana pasada. En esta asignatura puede pasaros en las PECs que queráis citar algún texto para complementar el libro de Torretti -como sucedió en la pregunta sobre su biografía.

Y para citar correctamente es necesario un estilo de cita. Esto os hará falta en el TFG, y más si seguís luego con el Máster. Así que una cosa que podéis hacer en esta asignatura es practicar con un estilo de cita muy usado en matemáticas.

Si os estáis preguntando qué es eso de citar y para qué sirve, aquí hay una explicación breve:

[https://www2.uned.es/biblioteca/tutorial\\_uso\\_etico/citas\\_bibliograficas.htm](https://www2.uned.es/biblioteca/tutorial_uso_etico/citas_bibliograficas.htm)

Si queréis ver un estilo de cita estándar en matemáticas, el AMS, aquí tenéis dos referencias:

- Un libro de estilo muy completo, las citas bibliográficas en la página 66:  
<https://www.ams.org/publications/authors/AMS-StyleGuide-online.pdf>
- AMS Author Handbook Journal Classes

No es, por supuesto, obligatorio, pero cualquier oportunidad es buena para practicar.

## Recursos

J. Ferreiros, Reseña de Torretti, El Paraíso de Cantor

I. Jané, Reseña de Ferreirós, Labyrinths of Thought

C. Álvarez, De la determinación del infinito a la inaccesibilidad en los cardinales transfinitos, *Crítica* 26/78 (1994), 27-71

J. Ferreirós, El enfoque conjuntista en matemáticas, *LA GACETA* vol. 1, no. 3 (1998), 389-412

I. Jané, ¿De qué trata la teoría de conjuntos?, R. Orayen et al. (ed), *Filosofía de la lógica*, Madrid, Trotta, 2004

J. Ferreirós, Un Episodio de la crisis de fundamentos, *LA GACETA DE LA RSME*, Vol. 7.2 (2004), pp. 449-467

Leo Corry, David Hilbert y su Filosofía Empiricista de la Geometría, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 9 (1) (2002), 27-44

J. Ferreirós, Kurt Gödel: revolución en los fundamentos de la matemática, *ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura* CLXXXIII 725 mayo-junio (2007) 409-418

I. Jané, La obra de Gödel en lógica matemática y teoría de conjuntos, *LA GACETA*, vol. 9, no. 3, 2006, 772-788

J. Bagaria, El legado de Turing en la lógica matemática y los fundamentos de las matemáticas, *Arbor* 189 (2013)

J. Ramos Arenas, Sobre la naturaleza de la Tesis de Church. *Ideas y Valores*, nº 92-93, diciembre de 1993, Bogotá (Colombia), páginas 157-167.

## Bibliografía complementaria

Si el alumno desea tener una introducción accesible al conjunto de la Historia de la matemática, puede utilizar el libro de Hans Wussing, *Lecciones de Historia de la matemática*, Madrid, Siglo XXI, 1998.

Una recopilación de textos originales que le servirá para ilustrarla es la de S. Hawking, *Dios creó los*

números, Barcelona, Crítica, 2006.

Buena parte de los textos originales en los que se apoya el libro de Torretti se encuentran recopilados en J. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Harvard, Harvard University Press, 1990.

Antonio Juano, tutor de nuestra asignatura, nos propone las siguientes lecturas para introducirnos en la asignatura, que podéis descargar de la carpeta "Lecturas introductorias", en los Documentos del curso.

Marta Macho, *Curiosidades sobre el conjunto de Cantor*

En este texto de Marta Macho, profesora de topología en la UPV/EHU y divulgadora matemática, sobre el conjunto de Cantor, realiza una contextualización histórica de la obra Cantor que os ayudará con el texto de Torretti -lo que dice sobre el conjunto como tal no lo abordaremos en el curso.

Ian Stewart, *Mentes maravillosas. Los matemáticos que cambiaron el mundo*

Este fragmento del libro del famoso divulgador Ian Stewart, se corresponde con el capítulo 12, titulado "El cardinal del continuo - George Cantor". Podríamos utilizar ese documento como una introducción amena a la asignatura, que nos atrape en el pensamiento del genio excepcional de Cantor y nos empuje al estudio de buena parte de la asignatura, que está basada en sus ideas.

Antonio Durán, "Cien años sin Cantor", *Gaceta RSME*

Este artículo del profesor Durán nos dará una visión general de la asignatura, más amplia y profunda que el anterior, relacionando los diversos autores que aparecen en el texto base. Podríamos denominarlo una vista de pájaro de nuestra Historia. Hay que tener en cuenta que, si bien es cierto, todavía en un ámbito muy general, lo explica con un lenguaje muy accesible y con anécdotas que facilitan la comprensión de ciertas cuestiones más áridas.

Carlos Gómez Bermúdez "Georg Cantor, centenario", *Gaceta RSME*

Este artículo se centra en la primera parte de la asignatura, la que el profesor Torretti titula Conjuntos, en ella con un lenguaje matemático actual, más cercano al conocido y utilizado por los estudiantes del Grado en otras asignaturas, se profundiza en estas cuestiones de manera didáctica y actual. El profesor Gómez Bermúdez es un auténtico especialista, que ha publicado artículos, trabajos y libros sobre George Cantor.

R. DiMartino & W. Urbina, "Excursiones a conjuntos similares al conjunto de Cantor", *Gaceta RSME*

Este artículo sobre el denominado conjunto de Cantor, va destinado a aquellos estudiantes que quieran profundizar en este tema, tratado en el texto de Torretti. Es muy interesante y completo el estudio de dicho conjunto perfecto y nunca denso en la recta real.

Para los muy curiosos: si queréis, además, echar un "vistazo virtual" a la edición de escritos de Cantor que ha preparado Gómez Bermúdez, podéis consultar esta reseña: *La Gaceta de la RSME*, Vol. 24 (2021), Núm. 1, Págs. 211-219

## Parte I | Conjuntos

**(1) Haga una breve semblanza (1000 palabras) de Georg Cantor apoyándose en materiales que encuentre en la red -e incluya la referencia**

- <https://plato.stanford.edu/search/search?query=%22georg+cantor%22>

**(2) Explique de qué modo se originan las ideas de Cantor sobre el infinito en el estudio de las series trigonométricas**

- [Fourier, Cantor, las series trigonométricas y la teoría de conjuntos](#)

**(3) Explique el concepto cantoriano de potencia (numerosidad) y los distintos tipos de infinito que permite distinguir**

**(4) Según Torretti, ¿qué dos vías confluyeron en la formación del concepto de transfinito?**

**(5) ¿Por qué el teorema del buen orden es central para el programa de Cantor?**

**(6) ¿Por qué los cardinales transfinitos son distintos de los ordinales?**

**(7) ¿Qué es la hipótesis del continuo y cómo afecta al programa de Cantor?**

**(8) ¿Por qué no toda “pluralidad bien definida” sería un conjunto en el sentido de Cantor?**

**(9) Explique la controversia entre Poincaré y Zermelo a propósito del axioma de selección**

**(10) ¿Por qué se hizo necesario definir axiomáticamente la teoría de conjuntos?**

### **Materiales de apoyo**

- [Georg Cantor, el Constructor del Paraíso](#), TFG de José Javier González López
- [Materiales complementarios](#)

## **Parte II | Cálculos**

**(11) Haga una breve semblanza (1000 palabras) de David Hilbert apoyándose en materiales que encuentre en la red -e incluya la referencia-**

**(12) Explique la importancia de los conceptos de consistencia, punto de vista finito y razonamiento sustantivo en el programa de Hilbert**

**(13) Explique cuál era el proyecto de Gottlob Frege y en qué sentido su definición de número introdujo una contradicción que lo arruinaría**

**(14) Explique las paradojas de Cantor y Burali-Forti y en qué sentido afectaban al concepto cantoriano de transfinito. Explique también en qué sentido la teoría russelliana de los tipos proporcionaba una solución y a qué coste**

**(15) ¿Por qué el concepto de aseveración funcional y el modo recursivo de pensar defendidos por Thoralf Skolem permitirían una fundamentación hilbertiana de la aritmética?**

**(16) ¿En qué consiste el problema de la decisión? ¿En qué sentido lo resuelve E. Post para el cálculo proposicional?**

**(17) ¿De qué modo prueba Gödel que el cálculo predicativo de primer orden es completo? ¿Por qué la prueba no es constructiva?**

**(18) ¿Qué es, para Hilbert, la teoría de la prueba? ¿En qué sentido el procedimiento de gödelización utilizado en la prueba de los teoremas de incompletitud ejemplifica esta teoría hilbertiana?**

**(19) Explique y comente la siguiente afirmación de Torretti (p. 352): el primer teorema de incompletitud de Gödel “habrá de parecernos mucho más grave si creemos que P y los sistemas afines comprende todos los recursos de que dispone el hombre para conocer con certeza una verdad sobre números no incluida ya en la aritmética finitista”**

**(20) ¿En qué sentido la tesis de Church constituye “una decisión de aceptar la computabilidad como criterio de calculabilidad” (p. 376)?**

**(21) ¿Qué quiere decir que “el problema de la detención es insoluble”?**

**(22) Gerhard Gentzen utilizó la inducción transfinita en sus dos demostraciones de la consistencia de la aritmética formalizada. Explique y comente la siguiente observación de Torretti (p. 319): “Si el programa de Hilbert acaba recurriendo al transfinito, ¿por qué tantos melindres y reservas ante el paraíso heredado de Cantor? ¿por qué no instalarse en él, alegremente, de una vez por todas?”**

### Materiales de Apoyo

- [Hilbert's Program](#), Stanford Encyclopedia of Philosophy

## Sumario del libro de Torretti

Prefacio xi

1 CONJUNTOS

1.1 La palabra ‘conjunto’ en la matemática del siglo XX .....1

1.2 ‘Conjunto’ (‘Menge’) en el vocabulario de Cantor .....7

1.3 Series trigonométricas .....13

1.4 Diversos infinitos .....21

1.5 Aritmética transfinita .....29

1.6 Paradojas y filosofemas .....49

1.7 El Teorema del Buen Orden y el Axioma de Selección .....63

1.8 Axiomas para una teoría de conjuntos .....71

1.8.1 Zermelo (1908) .....71

1.8.2 ¿Qué está ‘bien definido’? ...80

1.8.3 El Axioma de Reemplazo .....87

1.8.4 Aportes de von Neumann

.....90

1.8.5 Zermelo (1930)

.....102

2 CÁLCULOS

2.1 El programa de Hilbert

..... 115

2.2 Escritura conceptual

.....129

2.3 Fundamentos de la aritmética

.....145

2.3.1 Peano (1889)

.....145

2.3.2 Dedekind (1888)

.....151

2.3.3 Frege (1884)

.....159

2.4 La teoría de los tipos lógicos

.....177

2.5 Aritmética finitista

..... 211

2.6 Pruebas de consistencia

.....219

2.6.1 Ackermann (1925)

.....219

2.6.2 Von Neumann (1927)

.....232

2.6.3 Herbrand (1931b)

.....241

2.7 El Entscheidungsproblem y el Teorema de Herbrand .....247

2.8 El cálculo predicativo de primer orden es completo .....273

2.9 El programa de Hilbert visto más de cerca .....295

2.9.1 Axiomatización y formalización

.....29

5

2.9.2 Baluceos formales (Hilbert 1904) .....297

2.9.3 Teoría de la prueba  
.....304

2.9.4 La investigación de la consistencia de la matemática formalizada, a la luz del descubrimiento de Gödel ..316

2.10 Los Teoremas de Incompletud de Gödel .....321

2.10.1 Preliminares  
.....321

2.10.2 La incompletud de la aritmética .....326

2.10.3 La indemostrabilidad de la consistencia .....354

2.11 Funciones computables  
.....359

2.11.1 Funciones recursivas generales .....361

2.11.2 La Tesis y el Teorema de Church .....369

2.11.3 Las máquinas de Turing  
.....381

2.11.4 Diagramas y ejemplos  
.....383

2.11.5 Demostración de resultados  
.....407

2.12 Consistencia de la aritmética: la prueba de Gentzen .....421

2.12.1 Un cálculo aritmético  
.....423

2.12.2 Reducciones  
.....429

2.12.3 Orden de las derivaciones e inducción transfinita .....441

APÉNDICES

I Las definiciones cantorianas de ‘conjunto bien ordenado’ .....459

II Más sobre el buen orden  
.....

.....461

III La cardinalidad de la segunda clase de ordinales .....463

IV El argumento de Burali-Forti .....465

V La segunda demostración del Teorema del Buen Orden (Zermelo 1908) .....468

VI Los axiomas de Zermelo (1908a) .....471

VII Independencia del Axioma de Selección (Fraenkel 1922a) .....472

VIII Definición por inducción transfinita (von Neumann 1928) .....476

IX El cálculo predicativo .....480

X Axiomas de la lógica (Frege 1879) .....502

XI Definiciones recursivas (Dedekind 1888) .....504

XII Extensión y recorrido (Frege 1891, 1893a) .....509

XIII Fórmulas prenexas .....516

XIV El cálculo de predicados monádicos es decidible .....522

XV El cálculo proposicional es completo .....525

XVI Una forma abstracta del Primer Teorema de Incompletud de Gödel (Smullyan 1992) .....527

XVII Números de Gödel: Una alternativa .....529

XVIII Los axiomas del cálculo de primer orden investigado por Gödel (1930) son derivables en el cálculo de secuentes propuesto por Gentzen (1938) .....531

XIX Algunas ideas de Brouwer .....535

GLOSARIO .....541

OBRAS CITADAS .....551

ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS

.....573  
ÍNDICE DE PERSONAS Y CONCEPTOS  
.....  
.....575

From:  
<http://filosofias.es/wiki/> - **filosofias.es**

Permanent link:  
<http://filosofias.es/wiki/doku.php/math/historia-de-las-matematicas>



Last update: **2022/04/08 07:53**